

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 2/07/12**

- (1) Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|x|}{n}\right)^n e^{\frac{|x|}{2}} dx .$$

**Sol.:** La funzione integranda ha limite per  $|x| \rightarrow \infty$  uguale a  $\pm\infty$  a seconda che  $n$  sia pari o dispari, in ogni caso non è integrabile. Quindi lo stesso limite sopra indicato non è definito.

- (2) Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  misurabile secondo Lebesgue. Siano  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  tali che  $A \subset E$ ,  $B \subset \mathbb{C}E$ . Provare che

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) .$$

**Sol.** Si usa il criterio di Caratheodory per l'insieme misurabile  $E$  con insieme di confronto  $A \cup B$ .

- (3) Siano  $f, g$  misurabili su  $\mathbb{R}^n$  e tali che

$$|f(x)|, |g(x)| \leq e^{-|x|^2}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n ,$$

provare che esiste  $C > 0$  tale che

$$|f * g(x)| \leq C e^{-|x|^2}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n .$$

**Sol.** Qui c'è un errore nel quesito! il quesito corretto è:  
*provare che esiste  $C > 0$  tale che*

$$|f * g(x)| \leq C e^{-\frac{3|x|^2}{4}}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n .$$

Si procede così:

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2 - |y|^2} dy$$

ora

$$-|x-y|^2 - |y|^2 = -|x|^2 + 2x \cdot y - 2|y|^2 = -|x|^2 - 2\left|y - \frac{x}{2}\right|^2 + \left|\frac{x}{2}\right|^2$$

cioè

$$e^{-|x-y|^2 - |y|^2} = e^{-\frac{3|x|^2}{4}} e^{-2\left|y - \frac{x}{2}\right|^2}$$

quindi

$$|f * g(x)| \leq e^{-\frac{3|x|^2}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\left|y - \frac{x}{2}\right|^2} dy$$

e sostituendo  $z = y - \frac{x}{2}$  si ottiene la tesi con

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2|z|^2} dz = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$